ماز

دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

دوشنبه

۱۴۰۴/۰۱/۲۵

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بانک سؤالات کنکور:
گسسته: فصل ۱
هندسه: فصل ۲ و ۳ دوازدهم

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

ریاضیات

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضیات	۵۱	۱	۵۱	۹۰ دقیقه

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم		هفته پنجم	هفته ششم
گسسته و هندسه	آمار و احتمال + هندسه	آمار و احتمال + هندسه	آمار و احتمال + هندسه	گسسته و هندسه	-	گسسته و هندسه

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

سؤالات کنکور: گسسته فصل ۱ دوازدهم

۱- به ازای بعضی از مقادیر $n\in\mathbb{N}$، اگر $\alpha|13n+3$ و $\alpha|7n+4$ و $\alpha\neq 1$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

با ضرب کردن سمت راست رابطه عاد کردن در عدد مناسب داریم:

$$\begin{cases}\alpha|13n+3\Rightarrow\alpha|7(13n+3)\Rightarrow\alpha|91n+21\\ \alpha|7n+4\Rightarrow\alpha|13(7n+4)\Rightarrow\alpha|91n+52\end{cases}\xrightarrow{(-)}\alpha|31\xrightarrow{\alpha\neq1}\alpha=31\Rightarrow\begin{cases}31|13n+3\\31|7n+4\end{cases}$$

$$31|7n+4\Rightarrow 7n+4\overset{31}{\equiv}0\Rightarrow 7n\overset{31}{\equiv}-4\Rightarrow 7n\overset{31}{\equiv}-4-31\Rightarrow 7n\overset{31}{\equiv}-35\xrightarrow{(31,7)=1}n\overset{31}{\equiv}-5\Rightarrow n\overset{31}{\equiv}26$$

$$\Rightarrow n=31k+26\xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{k=0}\text{کمترین مقدار } n=26$$

دانستیم که کمترین مقدار n برابر ۲۶ است که مجموع ارقام آن برابر $2+6=8$ است.

گروه آموزشی ماز

۲- قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به‌ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

ابتدا معادله‌ای برای سوال تشکیل می‌دهیم (توجه شود که تعداد خرید از کالای اول را x و تعداد خرید از کالای دوم را y فرض می‌کنیم.)

$$220x+140y=19000\xrightarrow{\div 20}11x+7y=950$$

به کمک معادله هم‌نهشتی داریم:

$$11x\overset{7}{\equiv}950\Rightarrow 4x\overset{7}{\equiv}5\Rightarrow 4x\overset{7}{\equiv}5+7\Rightarrow 4x\overset{7}{\equiv}12\xrightarrow{(7,4)=1}x\overset{7}{\equiv}3\Rightarrow x=7k+3$$

حال $x=7k+3$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$11x+7y=950\Rightarrow 11(7k+3)+7y=950\Rightarrow 77k+33+7y=950\Rightarrow 7y=917-77k\Rightarrow y=131-11k$$

$$\begin{cases}x\geq0: 7k+3\geq0\Rightarrow k\geq-\frac{3}{7}\\ y\geq0: 131-11k\geq0\Rightarrow k\leq\frac{131}{11}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}-\frac{3}{7}\leq k\leq\frac{131}{11}\Rightarrow k=0,1,2,3,\dots,10,11$$

پس به ۱۲ طریق می‌توان از دو نوع کالا خرید.

گروه آموزشی ماز

۳- اگر عدد $7^{13}+a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

$$7^2\overset{23}{\equiv}3\longrightarrow 7^{12}\overset{23}{\equiv}3^6\xrightarrow{\times7}7^{13}\overset{23}{\equiv}7\times3^6\overset{23}{\equiv}7\times3^3\times3^3\overset{23}{\equiv}7\times27\times27\overset{23}{\equiv}7\times4\times4\overset{23}{\equiv}28\times4\overset{23}{\equiv}5\times4\overset{23}{\equiv}-3$$

$$\Rightarrow 7^{13}\overset{23}{\equiv}-3\xrightarrow{+a}7^{13}+a\overset{23}{\equiv}a-3\Rightarrow a-3\overset{23}{\equiv}0\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}3\Rightarrow a=23k+3$$

در نتیجه کوچک‌ترین عدد طبیعی a به ازای $k=0$ به دست می‌آید که برابر است با ۳.

گروه آموزشی ماز

۴- به ازای بعضی از مقادیر، $n\in\mathbb{N}$ اگر $\alpha|11n+3$ ، $\alpha|5n+4$ و $\alpha\neq1$، آنگاه تعداد اعداد دو رقمی n در این حالت، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

روابط مهم در بخش‌پذیری و هم‌نهشتی

$$\begin{cases} a\mid b \\ a\mid c\end{cases} \Rightarrow a\mid b\pm c$$

$$a\mid b \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} a\mid mb$$

$$a\mid b \xleftrightarrow{q\in\mathbb{Z}} b=aq$$

$$ac\overset{m}{\equiv}bc \xrightarrow{(c,m)=1} a\overset{m}{\equiv}b$$

$$\begin{cases} \alpha\mid 11n+3 \Rightarrow \alpha\mid 5(11n+3)\Rightarrow \alpha\mid 55n+15 \\ \alpha\mid 5n+4 \Rightarrow \alpha\mid 11(5n+4)\Rightarrow \alpha\mid 55n+44\end{cases} \xrightarrow{-} \alpha\mid 29 \xrightarrow{\alpha\neq 1} \alpha=29 \Rightarrow \begin{cases} 29\mid 11n+3 \\ 29\mid 5n+4\end{cases}$$

با انتخاب یکی از نتایج به دست آمده داریم:

$$29\mid 5n+4 \Rightarrow 5n+4\overset{29}{\equiv}0 \Rightarrow 5n\overset{29}{\equiv}-4 \Rightarrow 5n\overset{29}{\equiv}\underbrace{-4+29}_{25} \Rightarrow 5n\overset{29}{\equiv}25 \xrightarrow[(29,5)=1]{\div 5} n\overset{29}{\equiv}5 \Rightarrow n=29k+5 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$10\le n\le 99 \Rightarrow 10\le 29k+5\le 99 \Rightarrow k=1,2,3$$

۵- معادلهٔ سیالهٔ $9x+13y=725$، در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

ابتدا معادله سیاله داده شده را به یک معادله هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$9x+13y=725 \Rightarrow 9x\overset{13}{\equiv}725 \xrightarrow{725\overset{13}{\equiv}10} 9x\overset{13}{\equiv}10 \Rightarrow 9x\overset{13}{\equiv}\underbrace{10+2\times 13}_{36} \xrightarrow[(13,9)=1]{\div 9} x\overset{13}{\equiv}4 \Rightarrow x=13k+4$$

حال x را در معادله قرار می‌دهیم:

$$9(13k+4)+13y=725 \Rightarrow 9\times 13k+13y=689 \xrightarrow{\div 13} 9k+y=53 \Rightarrow y=-9k+53$$

چون جواب‌های طبیعی خواسته شده است، پس x و y باید بزرگ‌تر از صفر باشند:

$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow 13k+4>0 \Rightarrow k>\dfrac{-4}{13} \\ y>0 \Rightarrow -9k+53>0 \Rightarrow k<\dfrac{53}{9}\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k=0,1,2,3,4,5$$

۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 5^{20} بر ۴۱، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۸)

$$5^3\overset{41}{\equiv}2 \xrightarrow{\times 5^2} 5^5\overset{41}{\equiv}50\overset{41}{\equiv}9 \longrightarrow 5^{10}\overset{41}{\equiv}81\overset{41}{\equiv}-1 \longrightarrow 5^{20}\overset{41}{\equiv}1$$

۷- چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد، که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن اعداد بر ۴۳۰، با مجذور خارج قسمت، برابر باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ ترکیبی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

باید باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴۳۰، با مجذور خارج‌قسمت برابر باشد. پس طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a=430q+q^2 \ ; \ 0\le q^2<430 \Rightarrow 0<q\le 20$$

طبق گفته سوال، عدد a، عددی طبیعی است که مضرب ۹ است. پس:

$$a \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 430q + q^2 \overset{9}{\equiv} 0 \xrightarrow{430 \overset{9}{\equiv} 7 \overset{9}{\equiv} -2} -2q + q^2 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow q(q-2) \overset{9}{\equiv} 0$$

$$q \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow q = 9k \xrightarrow{0<q\le 20} q = 9, 18 \quad (k = 1, 2)$$

$$q - 2 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow q \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow q = 9k + 2 \xrightarrow{0<q\le 20} q = 2, 11, 20 \quad (k = 0, 1, 2)$$

بنابراین ۵ عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۴۳۰ با مجذور خارج‌قسمت برابر باشد.

گروه آموزشی ماز

۸- عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$، مجذور عدد دو رقمی $\overline{cc}$ است. $a-b$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۹۹)

$$\overline{aabb} = (\overline{cc})^2$$

$$1100a + 11b = (11c)^2$$

چون $\overline{aabb}$ مجذور عدد $\overline{cc}$ است. پس:

$$1000a + 100a + 10b + b = (10c + c)^2 \Rightarrow 11(100a + b) = (11c)^2 \Rightarrow 100a + b = 11c^2 \quad (*)$$

از طرفی چون $11c^2$ مضربی از ۱۱ است پس $100a+b$ نیز باید مضربی از ۱۱ باشد، بنابراین:

$$100a + b \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a + b \overset{11}{\equiv} 0 \xrightarrow[1 \le a+b \le 18]{1 \le a \le 9\ ,\ 0 \le b \le 9} a + b = 11$$

حال براساس رابطه (*) داریم:

$$100a + b = 11c^2 \Rightarrow 99a + a + b = 11c^2 \Rightarrow 99a + 11 = 11c^2$$

$$\Rightarrow 9a + 1 = c^2 \Rightarrow 9a = c^2 - 1 \Rightarrow 9a = (c-1)(c+1) \Rightarrow a = 7 \xrightarrow{a+b=11} b = 4$$

در نتیجه عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$ به صورت $88^2 = 7744$ است. پس:

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a - b = 7 - 4 = 3$$

گروه آموزشی ماز

۹- فرض کنید خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی سه رقمی m بر n به‌ترتیب، ۲۹ و ۱۷ باشند. تعداد عددهای طبیعی m بخش‌پذیر بر ۵، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت اعداد صحیح منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که:

$$a = bq + r\ ,\ 0 \le r < b$$

طبق اطلاعات سوال:

$$\begin{cases} \text{مقسوم} = m \\ \text{مقسوم‌علیه} = n \\ \text{خارج‌قسمت} = 29 \\ \text{باقی‌مانده} = 17 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه تقسیم}} \begin{cases} m = 29n + 17 \\ n > 17 \quad (1) \end{cases}$$

از طرفی m باید سه رقمی بوده و بر ۵ بخش‌پذیر باشد، پس:

$$\begin{cases} ۲۹n+۱۷<۱۰۰۰ \Rightarrow ۲۹n<۹۸۳ \Rightarrow n<\dfrac{۹۸۳}{۲۹} \Rightarrow n<۳۳/\ldots & (۲) \\ ۲۹n+۱۷ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow -n+۲ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow n \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow n=۵k+۲ & (۳) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=۵k+۲ \\ n<۳۳/\ldots \Rightarrow ۱۷<۱۵k+۲<۳۳/\ldots \Rightarrow ۱۵<۵k<۳۱/\ldots \Rightarrow ۳<k<۶/\ldots \Rightarrow k=۴,۵,۶ \\ n>۱۷ \end{cases}$$

پس به ازای $k=۴,۵,۶$، سه عدد با ویژگی‌های گفته شده برای m یافت می‌شود. ببینید:

$$\begin{cases} k=۴ \Rightarrow n=۲۲ \Rightarrow m=۶۵۵ \\ k=۵ \Rightarrow n=۲۷ \Rightarrow m=۸۰۰ \\ k=۶ \Rightarrow n=۳۲ \Rightarrow m=۹۴۵ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $(۳n^۲-۲n+۶,۳n+۵)=d$ و $d\neq ۱$ باشد، عدد d کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b\pm c \qquad \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|mb+nc$$

$$\begin{cases} d|۳n+۵ \xrightarrow{\times n} d|۳n^۲+۵n \\ d|۳n^۲-۲n+۶ \end{cases} \xrightarrow{(-)} d|(۳n^۲+۵n)-(۳n^۲-۲n+۶) \Rightarrow d|۷n-۶$$

$$\begin{cases} d|۷n-۶ \xrightarrow{\times ۳} d|۲۱n-۱۸ \\ d|۳n+۵ \xrightarrow{\times ۷} d|۲۱n+۳۵ \end{cases} \xrightarrow{(-)} d|(۲۱n+۳۵)-(۲۱n-۱۸) \Rightarrow d|۵۳$$

$$\Rightarrow d|۵۳ \rightarrow \begin{cases} d=۱ \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{d\neq۱} \times \\ d=۵۳ \checkmark \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- پنج برابر عدد دو رقمی $\overline{aa}$ را در سمت چپ $\overline{aa}$ قرار داده و آن را m می‌نامیم. m همنهشت کدام عدد زیر، به پیمانهٔ ۱۸۳۷ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۹۹)

$$m=(۵\times\overline{aa})(\overline{aa})$$

$$m=۵\times\overline{aa۰۰}+\overline{aa}=۵\times a\times ۱۱۰۰+a\times ۱۱=a\times ۱۱(۵۰۰+۱)$$

$$m=a\times ۱۱\times(۱۶۷\times ۳) \Rightarrow m=۳۳a\times ۱۸۳۷$$

عدد m، مضربی از ۱۸۳۷ است پس: $m \overset{۱۸۳۷}{\equiv} ۰$

گروه آموزشی ماز

۱۲- میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی به‌صورت $\overline{aba}$ که مضرب عدد ۱۲ باشند، کدام است؟

۱) ۳۴۸ ۲) ۵۴۰ ۳) ۵۷۰ ۴) ۵۷۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

با توجه به اینکه عدد $\overline{aba}$ سه رقمی است پس $a \neq ۰$ است و چون این عدد مضرب ۱۲ است، لذا a عددی زوج است، پس برای a، داریم:

$$\begin{cases} a \text{ زوج است } (۱) \\ a \neq ۰ \text{ است } (۲) \\ ۱ \leq a \leq ۹ \quad (۳) \end{cases}$$

$$\overline{aba} \overset{۱۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰۰a + ۱۰b + a \overset{۱۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow (۹۶a + ۴a) + (۱۲b - ۲b) + a \overset{۱۲}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۴a - ۲b + a \overset{۱۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵a - ۲b \overset{۱۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵a \overset{۱۲}{\equiv} ۲b$$

حال با توجه به شرایط (۱)، (۲) و (۳) برای a، به a مقداردهی می‌کنیم باید توجه داشته باشیم که برای داشتن بزرگ‌ترین مقدار عدد سه رقمی $a = ۸$ و برای به دست آوردن کوچک‌ترین مقدار عدد سه رقمی، $a = ۲$ قرار می‌دهیم:

$$a = ۲ \Rightarrow ۲b \overset{۱۲}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow b \overset{۶}{\equiv} ۵ \Rightarrow b = ۵ \xrightarrow{a=۲} \text{عدد موردنظر} = ۲۵۲$$

$$a = ۸ \Rightarrow ۲b \overset{۱۲}{\equiv} ۴۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۲b \overset{۱۲}{\equiv} ۴ \Rightarrow b \overset{۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow \begin{cases} b = ۲ \\ b = ۸ \end{cases}$$

از طرفی چون بزرگ‌ترین عدد را می‌خواهیم، $b = ۸$ را بر می‌داریم، پس عدد موردنظر به صورت ۸۸۸ است.

لذا میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد برابر است با:

$$\frac{۸۸۸ + ۲۵۲}{۲} = ۵۷۰$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > ۹$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقیماندهٔ آن باشد، احتمال این‌که عدد $a - ۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکته:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که:

$$a = bq + r \; ; ۰ \leq r < b$$

براساس گفته سوال و به کمک قضیه تقسیم:

$$\begin{cases} a = ۱۱q + r \; ; \; ۰ \leq r < ۱۱ \\ q = r + ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱۱(r + ۳) + r = ۱۱r + ۳۳ + r \Rightarrow a = ۱۲r + ۳۳$$

حال $a - ۹$ را می‌سازیم:

$$a - ۹ = ۱۲r + ۳۳ - ۹ \Rightarrow a - ۹ = ۱۲r + ۲۴ \Rightarrow a - ۹ = ۱۲(r + ۲)$$

با توجه به رابطه فوق برای اینکه عدد $a - ۹$ بخواهد بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد باید $(r + ۲)$ زوج باشد. پس:

$$\begin{cases} r + ۲ = \text{زوج} \\ ۰ \leq r < ۱۱ \end{cases} \Rightarrow r \in \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\} \Rightarrow n(A) = ۶$$

$$\Rightarrow n(S) = ۱۱$$

$$\Rightarrow P(\text{مطلوب}) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۱}$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- اگر m بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $(۱۰ - m)! \overset{۳۶}{\equiv} ۳۶$ ، آنگاه باقیماندهٔ تقسیم $m^{۱۲۳}$ بر ۱۵، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(۱۰-m)!\overset{۳۶}{\equiv}۳۶\overset{۳۶}{\equiv}۰$$

یعنی $(۱۰-m)!$ مضرب ۳۶ است.

از بین $۱!,۲!,۳!,۴!,۵!,۶!,...$ اولین عددی که مضربی از ۳۶ است $۶!=۷۲۰$ است. پس $۱۰-m=۶$ و $m=۴$ است. حال باید باقی‌مانده تقسیم $۴^{۱۲۳}$ بر ۱۵ را بیابیم. بنابراین:

$$۴^{۲}\overset{۱۵}{\equiv}۱\xrightarrow{\text{به توان } ۶۱}۴^{۱۲۲}\overset{۱۵}{\equiv}۱\xrightarrow{\times ۴}۴^{۱۲۳}\overset{۱۵}{\equiv}۴$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ $(\sqrt[۳]{۱۰}\cong ۲/۱)$

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ — (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

عددی که مکعب کامل باشد را $m^{۳}$ فرض می‌کنیم، می‌دانیم که این عدد مضربی از ۹ است پس m باید مضرب ۳ باشد. در این صورت:

$$m=۳q\Rightarrow m^{۳}=(۳q)^{۳}$$

به دنبال اعداد سه و چهار رقمی هستیم که ویژگی‌های گفته شده را داشته باشد، پس:

$$۱۰۰\le m^{۳}<۱۰۰۰۰\Rightarrow ۱۰۰\le (۳q)^{۳}<۱۰۰۰۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم}}\sqrt[۳]{۱۰۰}\le ۳q<\sqrt[۳]{۱۰۰۰۰}\Rightarrow \frac{۱۰}{\sqrt[۳]{۱۰}}\le ۳q<۱۰\sqrt[۳]{۱۰}\xrightarrow{\sqrt[۳]{۱۰}\cong ۲/۱}\frac{۱۰}{۲/۱}\le ۳q<۱۰(۲/۱...)$$

$$۴/...\le ۳q<۲۱/...\xrightarrow{\div ۳}۱/...\le q\le ۷/...\xrightarrow{q\in\mathbb{Z}}q\in\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$$

پس به ازای q های به دست آمده ۶ عدد با ویژگی‌های خواسته شده یافت می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۶- اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x=۶^{m}\times ۱۰^{n}$، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۵x$ کمتر باشد، اختلاف بزرگترین و کوچکترین مقدار ممکن برای x، کدام است؟

۱) ۱۲۹۶　　۲) ۲۳۰۴　　۳) ۶۴۰۰　　۴) ۸۷۰۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر عدد طبیعی n به صورت $n=P_{۱}^{\alpha_{۱}}.P_{۲}^{\alpha_{۲}}.P_{۳}^{\alpha_{۳}}...P_{k}^{\alpha_{k}}$ باشد:

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n : $(\alpha_{۱}+۱)(\alpha_{۲}+۱)(\alpha_{۳}+۱)...(\alpha_{k}+۱)$

طبق نکته درسنامه داریم:

$$x=۶^{m}\times ۱۰^{n}=(۲\times ۳)^{m}\times (۲\times ۵)^{n}=۲^{m}\times ۲^{n}\times ۳^{m}\times ۵^{n}=۲^{(m+n)}\times ۳^{m}\times ۵^{n}$$

$$\text{تعداد مقسوم علیه}=(m+n+۱)(m+۱)(n+۱)$$

حال برای $۱۵x$ داریم:

$$۱۵x=۳\times ۵\times ۲^{(m+n)}\times ۳^{m}\times ۵^{n}=۲^{(m+n)}\times ۳^{(m+۱)}\times ۵^{(n+۱)}$$

$$۱۵x\ \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های}=(m+n+۱)(m+۲)(n+۲)$$

از طرفی می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌های x، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۵x$ کمتر است:

$$(m+n+۱)(m+۲)(n+۲)-(m+n+۱)(m+۱)(n+۱)=۳۵\Rightarrow (m+n+۱)\big((m+۲)(n+۲)-(m+۱)(n+۱)\big)=۳۵$$

$$(m+n+۱)(m+n+۳)=۳۵\Rightarrow \begin{cases}m+n+۱=۵\\ m+n+۳=۷\end{cases}\Rightarrow m+n=۴$$

$$\Rightarrow m+n=۴\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} m & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴\\ \hline n & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ & ۰\end{array}$$

اگر بخواهیم عدد $x = ۶^m \times ۱۰^n$ کمترین مقدار را داشته باشد مطابق جدول فوق، توان بزرگ‌تر را به ۶ می‌دهیم و اگر بخواهیم عدد x بیشترین مقدار را داشته باشد توان بزرگ‌تر را به عدد ۱۰ می‌دهیم:

$$\begin{cases} x \text{ کمترین مقدار } = ۶^۴ \times ۱۰^۰ = ۱۲۹۶ \quad (m=۴, n=۰) \\ x \text{ بیشترین مقدار } = ۶^۰ \times ۱۰^۴ = ۱۰۰۰۰ \quad (m=۰, n=۴) \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} ۱۰۰۰۰ - ۱۲۹۶ = ۸۷۰۴$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر m کوچکترین عدد طبیعی باشد که $m!$ بر ۳۰ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقیماندهٔ تقسیم $m^{۳۳۲}$ بر ۳۱، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر p عددی اول و $a \in \mathbb{Z}$ باشد: $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} ۱ \; ; \; (a,p)=۱$

از بین $۱!, ۲!, ۳!, ۴!, ۵!, ۶!$ و ... اولین عددی که بر ۳۰ بخش‌پذیر است، $۵! = ۱۲۰$ است. پس $m = ۵$ است حال باید باقی‌مانده تقسیم $۵^{۳۳۲}$ بر ۳۱ را بیابیم بنابراین طبق نکته درسنامه داریم:

$$۵^{۳} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۱۱۰} ۵^{۳۳۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵^۲} ۵^{۳۳۲} \overset{۳۱}{\equiv} ۲۵$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- دو عدد $a^۲ - ۱$ و $۱۴a + ۶$، رقم یکان برابری دارند. رقم یکان $a^۲ + a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:
برای به‌دست آوردن رقم یکان هر عدد دلخواه، حاصل آن را در پیمانه ۱۰ به‌دست می‌آوریم.

$$a^۲ - ۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۴a + ۶ \to a^۲ - ۱۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

$$\to a^۲ - ۱۴a - ۷ + (۱۰ \times ۲a) \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \to a^۲ + ۶a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \to (a-۱)(a+۷) \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \begin{cases} a \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \to a^۲ + a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \\ a \overset{۱۰}{\equiv} -۷ \to a \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \to a^۲ + a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر x و y هر دو عدد طبیعی باشند، معادله سیاله خطی $۱۲x + ۱۱y = ۷۵۹$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:
برای حل معادلهٔ سیاله خطی $ax + by = c$ داریم:

$by \overset{a}{\equiv} c$ یا $ax \overset{b}{\equiv} c$

طرفین را به پیمانه ۱۱ می‌بریم:

$$۹ - ۵ + ۷ = ۱۱ \to ۱۱ | ۷۵۹ \to ۱۲x + ۱۱y \overset{۱۱}{\equiv} ۷۵۹ \Rightarrow ۱۲x \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \xrightarrow[(۱۲,۱۱)=۱]{\div ۱۲} x \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow x = ۱۱k$$

$$۱۱y = ۷۵۹ - ۱۲ \times ۱۱k \to \begin{matrix} y = ۶۹ - ۱۲k \\ x = ۱۱k \end{matrix} \xrightarrow{x,y \in \mathbb{N}} ۱ \le k \le ۵$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- معادله‌های هم‌نهشتی $ax \overset{5}{\equiv} n^2 + 3n$ و $ax \overset{5}{\equiv} 2n+1$ دارای جواب هستند. سه برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و ۵ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر $(a,5)=d$:

$(a,5)\mid n^2+3n \Rightarrow d\mid n^2+3n \xrightarrow{\times 2} d\mid 2n^2+6n \quad (1)$

$(a,5)\mid 2n+1 \Rightarrow d\mid 2n+1 \xrightarrow{\times n} d\mid 2n^2+n \quad (2)$

$\xrightarrow{(1)-(2)} d\mid 5n \Rightarrow d\mid 5 \Rightarrow d=1$ یا ۵

$d=5 \xrightarrow{n=1} 5\nmid 3 \Rightarrow d=1 \quad , \quad 3d=3$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر y بزرگ‌ترین عدد سه رقمی باشد که در معادله سیاله خطی $15x+21y=9$ صدق کند، مقدار قرینه x کدام است؟

۱) ۱۳۹۸ ۲) ۱۳۹۹ ۳) ۱۳۹۱ ۴) ۱۳۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

$15x+21y=9 \Rightarrow 5x+7y=3$

$7y \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow 2y \overset{5}{\equiv} -2 \xrightarrow{\div 2} y \overset{5}{\equiv} -1 \Rightarrow y=5k-1 \, (k\in\mathbb{Z})$

$5x+7(5k-1)=3 \Rightarrow 5x=-35k+10 \Rightarrow x=-7k+2$

$5k-1=999 \Rightarrow 5k=1000 \Rightarrow k=200$

$x=-7\times 200+2=-1398 \Rightarrow -x=1398$

گروه آموزشی ماز

۲۲- با قرار دادن عدد سه رقمی $3(\overline{a0a})$ بین دو رقم مشابه a، عدد جدید ساخته می‌شود. حداکثر چند عدد اول می‌تواند a را بشمارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته ۱:

عاد کردن: عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است، یا a، b را می‌شمارد یا $a\mid b$ یا b بر a بخش‌پذیر است. هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که $b=aq$.

نکته ۲:

اعداد اول فقط دارای ۲ شمارندهٔ طبیعی هستند، ۱ و خودش.

چون که عدد $3\times(\overline{a0a})$ سه رقمی است، پس a فقط می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ باشد. بنابراین داریم:

$a=1\Rightarrow$ هیچ عدد اولی آن را نمی‌شمارد.

$a=2\Rightarrow$ فقط یک عدد اول آن را می‌شمارد. $(p=2)$

$a=3\Rightarrow$ فقط یک عدد اول آن را می‌شمارد. $(p=3)$

پس حداکثر یک عدد اول، a را می‌شمارد و جواب گزینهٔ ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۲۳- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $63x+77y=273$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته ۱:

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که: $(a,b)\mid c$.

نکته ۲:

تبدیل معادله سیاله به یک معادلهٔ همنهشتی:

$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} ax \overset{|b|}{\equiv} c \\ by \overset{|a|}{\equiv} c \end{cases}$$

نکته ۳:

ویژگی‌های همنهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۳) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

۴) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \end{cases}$

۵) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

۷) $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

$$۶۳x+۷۷y=۲۷۳ \xrightarrow{\div ۷} ۹x+۱۱y=۳۹$$

$$۹x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۹ \Rightarrow -۲x \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(-۲,۱۱)=۱]{\div(-۲)} x \overset{۱۱}{\equiv} -۳ \Rightarrow x=۱۱k-۳ \xrightarrow{k=۱۰} x_{min}=۱۰۷$$

مجموع ارقام: $۱+۰+۷=۸$

گروه آموزشی ماز

۲۴- عدد صحیح a مضرب ۶ و باقیمانده تقسیم آن بر ۱۷ برابر ۱۱ است. باقیمانده تقسیم $\frac{a}{۳}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۱ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

a مضرب ۶ است، پس $a=۶k$ و در نتیجه داریم:

$$a \overset{۱۷}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow ۶k \overset{۱۷}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow ۶k \overset{۱۷}{\equiv} -۶ \Rightarrow k \overset{۱۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow ۲k \overset{۱۷}{\equiv} -۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۵ \Rightarrow \frac{a}{۳} \overset{۱۷}{\equiv} ۱۵$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- به‌ازای کدام مقدار زیر برای a، معادله سیاله $۵۱x+۸۵y=۷a-۱$ دارای جواب است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۹ ۳) ۴۴ ۴) ۴۹

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

معادلهٔ سیاله

شرط وجود جواب در معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ در مجموعهٔ اعداد صحیح آن است که $(a,b)|c$.

$$(۵۱,۸۵)|۷a-۱ \Leftrightarrow (۳\times۱۷,۱۷\times۵)=۱۷|۷a-۱$$

$$\Rightarrow ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow a \overset{۱۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow a=۱۷k+۵$$

$$a \in \{۵,۲۲,۳۹,۵۶,...\}$$

سؤالات کنکور: هندسه فصل ۲ دوازدهم

۲۶- وتر مشترک دایرهٔ C با دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x=۶$ ، منطبق بر نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر دایرهٔ C از نقطهٔ $(-۱,۴)$ بگذرد، معادلهٔ آن کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-y+۳x=۶$
۲) $x^۲+y^۲+۲y-x=۶$
۳) $x^۲+y^۲-۲y+x=۶$
۴) $x^۲+y^۲-۳y-x=۶$

پاسخ: گزینهٔ ۴ — (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱) (کنکور داخل ۹۸)

روش اول:

معادلهٔ دایرهٔ C را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ فرض می‌کنیم و معادلهٔ وتر مشترک دو دایره را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \\ x^۲+y^۲-۴x-۶=۰ \end{cases} \xrightarrow{(-)} (a+۴)x+by+c+۶=۰$$

می‌دانیم که وتر مشترک دو دایره بر نیمساز ناحیه اول $(y=x)$ منطبق است. پس:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-(a+۴)}{b}x-\dfrac{(c+۶)}{b} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-(a+۴)}{b}=۱ \Rightarrow -a-۴=b \Rightarrow a+b=-۴ \\ c+۶=۰ \Rightarrow c=-۶ \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که دایره C از نقطه $(-۱,۴)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \Rightarrow ۱+۱۶-a+۴b-۶=۰ \Rightarrow ۴b-a=-۱۱$$

$$\begin{cases} ۴b-a=-۱۱ \\ a+b=-۴ \end{cases} \Rightarrow a=-۱\ ,\ b=-۳$$

پس معادله دایره C برابر است با:

$$x^۲+y^۲-x-۳y-۶=۰$$

روش دوم:

چون نقطه $(-۱,۴)$ روی دایره C قرار دارد، بنابراین این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند که این نقطه تنها در معادله موجود در گزینه ۴ صدق می‌کند!

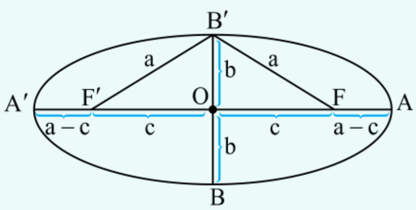
گروه آموزشی ماز

۲۷- در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

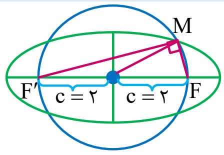
پاسخ: گزینهٔ ۲ — (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

در بیضی مقابل داریم



$$\begin{cases} \text{قطر بزرگ} = AA'=۲a \\ \text{قطر کوچک} = BB'=۲b \\ \text{فاصله کانونی} = FF'=۲c \end{cases}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲$$



$$\begin{cases} ۲a=۲\sqrt{۵} \Rightarrow a=\sqrt{۵} \\ ۲b=۲ \Rightarrow b=۱ \end{cases}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۵=۱+c^۲ \Rightarrow c=۲$$

چون $b=۱$ و $c=R=۲$ است، بنابراین دایره، بیضی را در ۴ نقطه قطع می‌کند و از کانون‌های بیضی عبور می‌کند و فاصله کانونی بیضی همان قطر دایره است. پس زاویه $F\hat{M}F'$، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر بوده بنابراین این زاویه برابر ۹۰° است. پس طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{FMF'}$ داریم:

$$MF^۲+MF'^۲=(FF')^۲ \Rightarrow MF^۲+MF'^۲=(۲c)^۲=۴c^۲=۴\times(۲)^۲=۱۶$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- وتر مشترک دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=17$، با دایرهٔ C گذرا بر نقطهٔ $(6,-1)$، بر خط به معادلهٔ $2x-y=3$ منطبق است. شعاع دایرهٔ C، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

ـ مرکز شعاع دایرهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ برابر است با:

$$O\begin{vmatrix}-\frac{a}{2}\\-\frac{b}{2}\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

ـ اگر دو دایره C_1 و C_2 متقاطع باشند، معادله وتر مشترک دو دایره برابر است با:

$$C_1-C_2=0$$

باید معادلهٔ ۲ دایره به گونه‌ای باشد که موقع کم کردن x^2 و y^2 باهم ساده شوند و آنچه باقی می‌ماند معادلهٔ خط باشد.

ـ اگر دو خط به معادله $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ بر هم منطبق باشند، شیب و عرض از مبدأ برابری دارند، لذا:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

ابتدا معادلهٔ دایرهٔ C را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ فرض می‌کنیم، حال برای یافتن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^2+y^2+ax+by+c=0\\x^2+y^2-17=0\end{cases}\xrightarrow{-}ax+by+c+17=0$$

می‌دانیم که خط حاصل بر خط $2x-y=3$ منطبق است، پس:

$$\begin{cases}ax+by+c+17=0\\2x-y-3=0\end{cases}\xrightarrow{\text{انطباق}}\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{c+17}{-3}\Rightarrow\begin{cases}a=-2b\\c=3b-17\end{cases}\xrightarrow{\text{گذاشتن در معادله دایره}}x^2+y^2+(-2b)x+by+(3b-17)=0$$

$$\xrightarrow{\text{دایره از نقطه }(6,-1)\text{ عبور می‌کند}}6^2+(-1)^2-2b(6)+b(-1)+3b-17=0\Rightarrow-10b+20=0\Rightarrow10b=20\Rightarrow b=2$$

با قرار دادن $b=2$ در معادله $\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{c+17}{-3}$، $a=-4$ و $c=-11$ به دست می‌آید. حال معادله دایره C برابر است با:

$$x^2+y^2-4x+2y-11=0\Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+2^2-4(-11)}=4$$

گروه‌آموزشی ماز

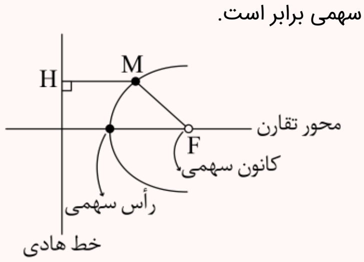
۲۹- مختصات کانون سهمی به معادلهٔ $2x^2-4x+3y=4$، کدام است؟

۱) $(1,\frac{5}{4})$ ۲) $(1,\frac{13}{8})$ ۳) $(\frac{1}{4},2)$ ۴) $(\frac{5}{8},2)$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۹۸)

سهمی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت به نام کانون سهمی و خطی ثابت به نام خط هادی سهمی برابر است.



$$MF=MH$$

اگر محور تقارن سهمی در جهت محور xها باشد سهمی افقی و اگر محور تقارن سهمی در جهت محور yها باشد سهمی قائم است.

معادلهٔ سهمی افقی به مرکز $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$: a = فاصلهٔ رأس تا خط هادی = فاصلهٔ کانون تا رأس $(y-\beta)^۲=\pm ۴a(x-\alpha)$

(+): دهانه در جهت محور x (-): دهانه در خلاف جهت محور x

معادلهٔ سهمی قائم به مرکز $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$: a = فاصلهٔ رأس تا خط هادی = فاصلهٔ کانون تا رأس $(x-\alpha)^۲=\pm ۴a(y-\beta)$

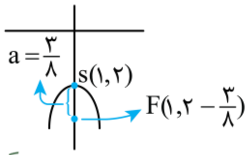
(+): دهانه در جهت محور y (-): دهانه در خلاف جهت محور y

ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد تشکیل می‌دهیم:

$$۲x^۲-۴x+۳y=۴\Rightarrow ۲(x^۲-۲x)=۲\Big((x-۱)^۲-۱\Big)=-۳y+۴\Rightarrow ۲(x-۱)^۲=-۳y+۶=-۳(y-۲)\Rightarrow (x-۱)^۲=-\frac{۳}{۲}(y-۲)$$

سهمی قائم رو به پایین است پس:

$$\Rightarrow S(۱,۲)\Rightarrow ۴a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۸}\xrightarrow{\text{سهمی قائم}}F(۱,۲-\frac{۳}{۸})\Rightarrow F(۱,\frac{۱۳}{۸})$$



گروه آموزشی ماز

۳۰- کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر دو نقطهٔ $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳- و ۱ ۲) ۳- و ۰ ۳) ۱- و ۲ ۴) ۲- و ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

کوچک‌ترین دایره گذرا بر دو نقطه A و B، همان دایره‌ای است که پاره‌خط AB، قطر آن باشد، پس:

$$AB=۲R\Rightarrow\sqrt{(۲-(-۴))^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۳۶+۱۶}=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}=۲R\Rightarrow R=\sqrt{۱۳}$$

از طرفی مرکز دایره نیز وسط پاره‌خط AB است. پس:

$$O=(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})\Rightarrow O=(\frac{۲-۴}{۲},\frac{۵+۱}{۲})\Rightarrow O=(-۱,۳)$$

حال با داشتن مختصات مرکز دایره و شعاع دایره، معادله دایره را تشکیل می‌دهیم:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲\Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۳$$

و برای پیدا کردن طول نقطهٔ تلاقی دایره فوق با محور xها، به جای y در معادله فوق، صفر قرار داده و داریم:

$$(x+۱)^۲+۹=۱۳\Rightarrow (x+۱)^۲=۴\Rightarrow x+۱=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=-۳\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

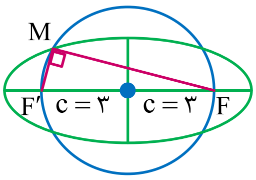
۳۱- در یک بیضی به قطرهای ۸ و $۲\sqrt{۷}$ واحد و کانون‌های F و F'، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطهٔ M، قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

۱) $۴-۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲/۵ ۳) $۴-\sqrt{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

طبق اطلاعات گفته شده داریم:

$$\begin{cases}۲a=۸\Rightarrow a=۴\\ ۲b=۲\sqrt{۷}\Rightarrow b=\sqrt{۷}\\ c^۲=a^۲-b^۲=۱۶-۷=۹\Rightarrow c=۳\Rightarrow R=۳\end{cases}$$



از طرفی زاویه $\hat{M}$، زاویه‌ای محاطی و روبه‌رو به قطر دایره است. پس $\hat{M}=۹۰^\circ$ است. حال طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{MFF'}$ داریم:

$$(FF')^۲=(MF')^۲+(MF)^۲\quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم که $MF+MF'=۲a=۸$ است. پس:

$$۶۴=(MF)^۲+(MF')^۲+۲MF\times MF'\xrightarrow{FF'=۶}۳۶=۶۴-۲MF\times MF'\Rightarrow MF\times MF'=۱۴$$

چون $MF+MF'=۸$ و $MF\times MF'=۱۴$ است، پس می‌توانیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که جمع ریشه‌های آن برابر ۸ و ضرب ریشه‌های آن برابر ۱۴ است. پس:

$$x^۲-۸x+۱۴=۰\xrightarrow{\Delta=۸}\begin{cases}x_۱=MF'=۴-\sqrt{۲}\\x_۲=MF=۴+\sqrt{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{فاصلهٔ نقطهٔ M تا نزدیک‌ترین کانون}}x=۴-\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۳۲- اگر نقطهٔ $F(-۰/۲۵,-۲)$ کانون سهمی $y^۲+ay+bx+۱=۰$ باشد، کوچک‌ترین مقدار b، کدام است؟

۱) ۴-　　۲) ۳-　　۳) ۲-　　۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲　　(متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۹)

می‌دانیم که به خاطر حضور $y^۲$، سهمی افقی است لذا عرض رأس سهمی و عرض کانون با هم برابر است پس:

$$\frac{-a}{۲}=-۲\Rightarrow a=۴$$

حال معادله سهمی را به صورت مقابل نوشته و آن را استاندارد می‌کنیم:

$$y^۲+۴y+bx+۱=۰\Rightarrow(y+۲)^۲-۴=-bx-۱\Rightarrow(y+۲)^۲=-bx+۳\Rightarrow(y+۲)^۲=-b(x-\frac{۳}{b})$$

بنابراین مختصات رأس سهمی به صورت $S(\frac{۳}{b},-۲)$ و پارامتر سهمی به صورت $-\frac{b}{۴}$ است پس کانون این سهمی به صورت $F(\frac{۳}{b}-\frac{b}{۴},-۲)$ بوده و مطابق فرض سوال داریم:

$$\frac{۳}{b}-\frac{b}{۴}=-۰/۲۵$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{b}-\frac{b}{۴}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱۲-b^۲}{۴b}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow-b=۱۲-b^۲\Rightarrow b^۲-b-۱۲=۰\Rightarrow\begin{cases}b=۴\\b=-۳\end{cases}\xrightarrow{\text{کوچکترین مقدار}}b=-۳$$

حالا نوبت شماست. آیا می‌توانیم $\frac{b}{۴}+\frac{۳}{b}$ را طول نقطهٔ کانون یعنی $-۰/۲۵$ در نظر بگیریم؟

گروه آموزشی ماز

۳۳- دایره‌ای به مرکز $(۱,۳)$ بر روی خط راست $۵x+۱۲y=۱۵$، وتری به‌طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$　　۲) ۶　　۳) $۲\sqrt{۱۵}$　　۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴　　(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

نکته ۱:

فاصله نقطه $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با:

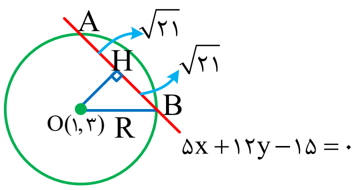
$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته ۲:

اگر نقطه $O(\alpha,\beta)$ مرکز و R شعاع یک دایره باشد، داریم:

فرم استاندارد دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$

با توجه به شکل زیر، ابتدا فاصله مرکز دایره یعنی $O(۱,۳)$ را از خط $۵x+۱۲y=۱۵$ پیدا می‌کنیم:



$$OH=\frac{|۵(۱)+۱۲(۳)-۱۵|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{|۵+۳۶-۱۵|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}$$

$$OH=\frac{|۲۶|}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OHB داریم:

$OB^۲ = OH^۲ + HB^۲$

$OB^۲ = ۲^۲ + (\sqrt{۲۱})^۲ = ۴ + ۲۱ = ۲۵ \Rightarrow OB = R = ۵$

معادله دایره را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} O(۱,۳) \\ R = ۵ \end{cases} \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵^۲$$

حال برای پیدا کردن طول نقطه تلاقی این دایره با محور xها، y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{y=۰} (x-۱)^۲ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow (x-۱) = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} x-۱ = ۴ \to x = ۵ \\ x-۱ = -۴ \to x = -۳ \end{cases}$$

بنابراین طول وتری که این دایره روی محور xها جدا می‌کند برابر است با: $۵-(-۳) = ۵+۳ = ۸$

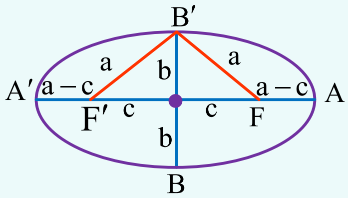
گروه آموزشی ماز

۳۴- یک بیضی به قطرهای $AA' = ۱۴$ و $BB' = ۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطهٔ A، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطهٔ F، دایره به قطر AA' را در نقطهٔ M، قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط AM، کدام است؟

۱) ۷ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

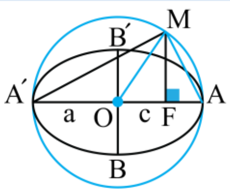
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

در بیضی مقابل داریم:



- قطر بزرگ $= AA' = ۲a$
- قطر کوچک $= BB' = ۲b$
- فاصله دو کانون $= FF' = ۲c$
- $a^۲ = b^۲ + c^۲$
- خروج از مرکز بیضی $= e = \frac{c}{a} = \sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}$

اطلاعات گفته شده را روی شکل مقابل پیاده می‌کنیم:



$AA' = ۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷$

$BB' = ۲b = ۴\sqrt{۶} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۶}$

$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴۹ - ۲۴ \Rightarrow c = \sqrt{۲۵} = ۵$

زاویهٔ $\hat{AMA'}$، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر AA' است، پس این زاویه قائمه و مثلث $AA'M$ قائم‌الزاویه است و در نتیجه داریم:

$AM^۲ = A \times AA' = (a-c) \times ۲a = (۷-۵) \times ۱۴ = ۲۸ \Rightarrow AM = ۲\sqrt{۷}$

گروه آموزشی ماز

۳۵- در سهمی به معادلهٔ $y^۲ + ay + bx - ۹ = ۰$، معادلهٔ خط هادی، $x = \frac{۱۳}{۴}$ و محور تقارن آن $y = ۱$ است. مقدارهای b، کدام‌اند؟

۱) ۸ ، ۵ ۲) ۷ ، ۵ ۳) ۸ ، ۴ ۴) ۷ ، ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۹۹)

با توجه به معادله سهمی، داریم:

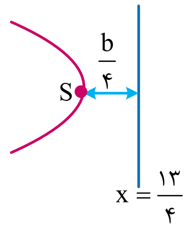
$y^۲ + ay + bx - ۹ = ۰ \Rightarrow y^۲ + ay = -bx + ۹$

$$\Rightarrow y^۲ + ay + \frac{a^۲}{۴} = -bx + ۹ + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow (y + \frac{a}{۲})^۲ = -b(x - \frac{۹ + \frac{a^۲}{۴}}{b}) \Rightarrow \begin{cases} \text{محور تقارن سهمی}: y = -\frac{a}{۲} = ۱ \Rightarrow a = -۲ \\ \text{فاصله کانونی}: -\frac{b}{۴} \end{cases}$$

چون محور تقارن سهمی $y=1$ است، پس عرض رأس سهمی برابر ۱ است، لذا داریم:

$$y^2-2y+bx-9=0 \xrightarrow{y=1} 1-2+bx-9=0 \Rightarrow bx=10 \Rightarrow x=\frac{10}{b}$$

بنابراین مختصات رأس سهمی به صورت $S(\frac{10}{b},1)$ است، لذا مطابق شکل زیر، معادله خط هادی را می‌توان به صورت زیر نوشت:



$$x_S-(-\frac{b}{4})=\frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{b}+\frac{b}{4}=\frac{13}{4} \Rightarrow \frac{40+b^2}{4b}=\frac{13}{4} \Rightarrow 40+b^2=13b \Rightarrow b^2-13b+40=0$$

$$\Rightarrow (b-5)(b-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ b=8 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- سهمی $(x-1)^2-12y=6$ با رأس F و کانون F' مفروض است. یک بیضی با کانون‌های F و F' و خروج از مرکز ۰/۶ می‌سازیم. فاصلهٔ مرکز بیضی از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکته:

در یک سهمی قائم رو به بالا به فرم $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ داریم:

$S(\alpha,\beta)$: مختصات رأس سهمی

$F(\alpha,a+\beta)$: مختصات کانون سهمی

ابتدا مختصات رأس و کانون سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$(x-1)^2-12y=6 \Rightarrow (x-1)^2=12y+6 \Rightarrow (x-1)^2=12(y+\frac{1}{2}) \Rightarrow 4a=12 \Rightarrow a=3$$

با توجه به معادله به دست آمده می‌توان گفت که:

- مختصات رأس سهمی به صورت $F(1,-\frac{1}{2})$ است.
- سهمی ما، یک سهمی قائم و با دهانه رو به بالا می‌باشد، بنابراین مختصات کانون آن به صورت $F'(1,-\frac{1}{2}+3)$ یعنی $F'(1,\frac{5}{2})$ است.

می‌دانیم که F و F' کانون‌های یک بیضی هستند بنابراین مختصات مرکز بیضی برابر است با:

$$\Rightarrow O(\frac{1+1}{2},\frac{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{2}) \Rightarrow O(1,1)$$

حال باید فاصله مرکز بیضی را از مبدأ مختصات بیابیم که برابر $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ است.

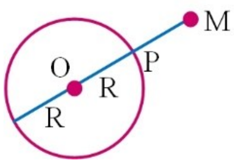
گروه آموزشی ماز

۳۷- فرض کنید خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ قطرهای یک دایره و خط $4x+3y+5=0$ مماس بر آن باشد. نزدیکترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(4,-2)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-1$ ۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{5}-2$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

با توجه به شکل مقابل، نزدیک‌ترین فاصله نقطه M از دایره، همان فاصله MP است که برابر است با:



$$MP=|OM-R| \quad (*)$$

خب حالا بریم سراغ حل:

می‌دانیم که محل تلاقی قطرهای دایره، مرکز دایره است. پس:

$$\begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{مختصات مرکز دایره}: O(۲,-۱)$$

از طرفی می‌دانیم که فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، همان شعاع دایره است پس فاصله مرکز دایره را از خط $۴x+۳y+۵=۰$ پیدا می‌کنیم:

$$R=\frac{|(۴\times ۲)+(۳\times(-۱))+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{|۸-۳+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

حال طبق رابطه (*) باید فاصله مرکز دایره از نقطه M را هم داشته باشیم:

$$\begin{cases} O(۲,-۱) \\ M(۴,-۲) \end{cases} \Rightarrow OM=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۲-(-۱))^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

بنابراین نزدیک‌ترین فاصله نقطه M از دایره برابر است با:

$$MP=|OM-R| \Rightarrow MP=|\sqrt{۵}-۲|=\sqrt{۵}-۲$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- فرض کنید طول خط‌المرکزین دو دایره با شعاع‌های $۶a-۱$ و $a^۲-۲$، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

چون دو دایره فقط یک مماس مشترک (داخلی و خارجی) دارند. بنابراین دو دایره مماس درون هستند. پس:

$$OO'=|R-R'| \Rightarrow ۶=|(a^۲-۲)-(۶a-۱)| \Rightarrow ۶=|a^۲-۶a-۱| \Rightarrow a^۲-۶a-۱=\pm ۶$$

$$\begin{cases} a^۲-۶a-۱=۶ \Rightarrow a^۲-۶a-۷=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \times \\ a=۷ \checkmark \end{cases} \\ a^۲-۶a-۱=-۶ \Rightarrow a^۲-۶a+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \times \\ a=۵ \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

از طرفی $۶a-۱$ و $a^۲-۲$، شعاع دایره هستند پس همواره مثبت هستند:

$$\begin{cases} a^۲-۲>۰ \Rightarrow a^۲>۲ \Rightarrow \begin{cases} a>\sqrt{۲} \\ a<-\sqrt{۲} \end{cases} \xrightarrow[\text{غ‌ق‌ق}]{a>۰} a>\sqrt{۲} \\ ۶a-۱>۰ \Rightarrow ۶a>۱ \Rightarrow a>\frac{۱}{۶} \end{cases}$$

بنابراین a همواره باید بزرگ‌تر از $\sqrt{۲}\sim ۱/۴$ باشد. پس $a=\pm ۱$ غیر قابل قبول هستند. در نتیجه میانگین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:

$$\frac{۵+۷}{۲}=۶$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- طول خط‌المرکزین دو دایره مماس درونی $۳/۵$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها ۲۱π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

اگر دو دایره به شعاع‌های r و R مماس داخل باشند، طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر $|R-r|$ است.

$$\left.\begin{array}{l} R-r=۳/۵ \\ R^{۲}\pi-r^{۲}\pi=۲۱\pi \rightarrow R^{۲}-r^{۲}=۲۱ \end{array}\right\} \Rightarrow R+r=۶ \;,\; R-r=۳/۵ \rightarrow ۲r=۲/۵ \rightarrow r=۱/۲۵$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- به ازای هر m، معادله $(m-۲)x+(m+۱)y=۶$، معادله قطری از دایره C است. اگر نقطه $A(-۱,۱)$ روی دایره C باشد، محیط دایره C کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}\pi$ ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) $۲\sqrt{۳}\pi$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر شعاع است.

$$\left.\begin{array}{l} m=۲ \rightarrow ۳y=۶ \rightarrow y=۲ \\ m=-۱ \rightarrow -۳x=۶ \rightarrow x=-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow O(-۲,۲)$$

$$r=|OA|=\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۲} \rightarrow \text{محیط دایره}=۲\pi r=۲\pi\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۴۱- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. شعاع دایره بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

طول مماس مشترک دو دایره مماس خارج با شعاع‌های $R_{۱}$ و $R_{۲}$ برابر $۲\sqrt{R_{۱}R_{۲}}$ است.

اگر فرض کنیم $R_{۱}>R_{۲}$ خواهیم داشت:

$$۲\sqrt{R_{۱}R_{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R_{۱} \Rightarrow ۴R_{۱}R_{۲}=\frac{۳}{۴}R_{۱}^{۲} \Rightarrow R_{۱}=\frac{۱۶}{۳}R_{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۴۲- معادله دایره‌ای که بر دو دایره $x^{۲}-۸x+y^{۲}+۱۵=۰$ و $x^{۲}-۲x+y^{۲}=۰$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورها قرار دارد، کدام است؟

۱) $x^{۲}+y^{۲}+۵x+۶=۰$ ۲) $x^{۲}+y^{۲}-۵x+۶=۰$

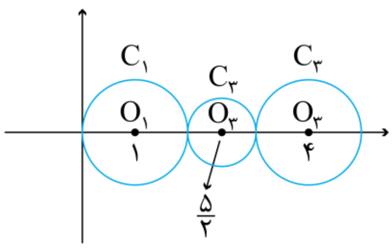
۳) $۴x^{۲}+۴y^{۲}-۲۰x+۲۵=۰$ ۴) $۴x^{۲}+۴y^{۲}+۲۰x+۲۵=۰$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

مرکز و شعاع دایره $x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$O\left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right) \qquad R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}$$

مطابق شکل داریم:



$O_{۱}(۴,۰) \quad , \quad R_{۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-۶۰}=۱$

$O_{۲}(۱,۰) \quad , \quad R_{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴}=۱$

$O_{۳}\left(\frac{۵}{۲},۰\right) \quad , \quad R_{۳}=\frac{۱}{۲}$

$$\left(x-\frac{۵}{۲}\right)^{۲}+y^{۲}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۵x+۶=۰$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- نمودار سهمی با مختصات رأس $(-1,-1)$، از نقطه $(1,1)$ می‌گذرد. اگر از دو سر وتری که از کانون بر محور سهمی عمود است، دو خط موازی با محور سهمی بر خط هادی عمود کنیم، یک مستطیل رسم می‌شود. قطر مستطیل حاصل کدام است؟

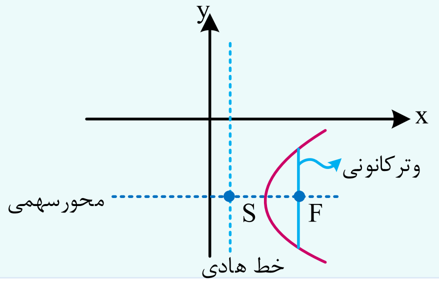
۱) $5\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

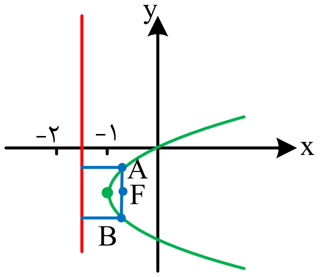
به خطی که از کانون سهمی گذشته و بر محور سهمی عمود است، وتر کانونی سهمی می‌گویند. طول وتر کانونی سهمی برابر $4a$ است که a فاصلهٔ کانونی سهمی می‌باشد.

برای مثال، سهمی افقی زیر را ببینید:



سهمی را به طور دلخواه افقی در نظر می‌گیریم. در نتیجه، چون رأس سهمی $(-1,-1)$ است. خواهیم داشت:

$$(y+1)^2=4a(x+1)\xrightarrow{\text{جایگذاری نقطه}(1,1)}4=4a\times 2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$



$$\text{قطر}=\sqrt{(4a)^2+(2a)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

گروه آموزشی ماز

۴۴- خط d به معادله $y-x=0$، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچک‌تر به معادله $x^2+y^2+6x-2y=r$ مماس باشد، حاصل‌ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{65}{32}$ ۴) $\frac{65}{64}$

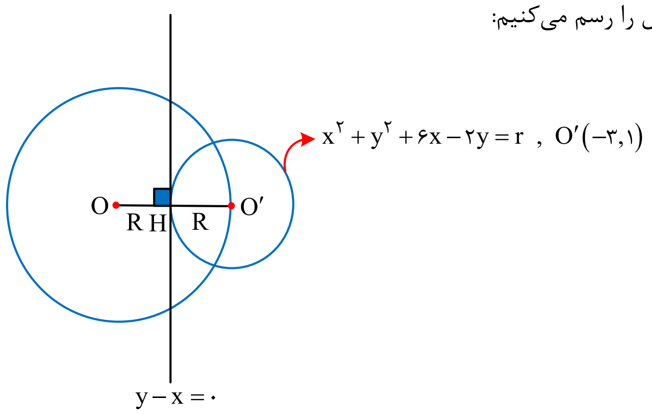
پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

در معادلهٔ گسترده دایره به فرمول $x^2+y^2+ax+by+c=0$ داریم:

مرکز دایره: $\begin{cases}x=-\frac{a}{2}\\ y=-\frac{b}{2}\end{cases}$ شعاع دایره $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

برای درک بهتر سوال شکل را رسم می‌کنیم:



$$R=|O'H|=\frac{|1-(-3)|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ شعاع دایره بزرگ: $2R=4\sqrt{2}$

معادله خط OO' را می‌نویسیم:

$$m_{OO'} = \frac{-1}{\text{شیب } y-x=0} = -1$$

$O'(-3,1)$

$$y-y_0 = m(x-x_0) \Rightarrow y-1=-1(x+3) \Rightarrow y-1=-x-3 \Rightarrow y=-x-2$$

این خط و $y-x=0$ را تقاطع می‌دهیم و نقطه H به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y-x=0 \\ y+x=-2 \end{cases}$$
$$2y=-2 \Rightarrow y=-1$$
$$-1-x=0 \Rightarrow x=-1 \qquad \Rightarrow H(-1,-1)$$

حال، با توجه به اینکه H وسط نقطه O و O' است، O به دست می‌آید:

$$\frac{O+O'}{2} = H \Rightarrow O = 2H - O' = (-2,-2)-(-3,1) = (1,-3)$$

معادله دایره بزرگ : $(x-1)^2+(y+3)^2=32$

معادله دایره کوچک : $(x+3)^2+(y-1)^2=8$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله را تقاطع می‌دهیم}} \begin{cases} x^2+y^2-2x+6y-22=0 \\ x^2+y^2+6x-2y+2=0 \end{cases}$$
$$8x-8y+24=0$$
$$x-y=-3 \Rightarrow y=x+3$$

در دایره بزرگ (فرقی ندارد در کدام دایره) جایگزین می‌کنیم:

$$(x-1)^2+(x+3+3)^2=32$$

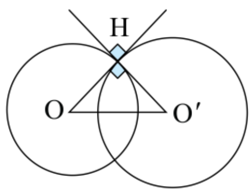
$$2x^2+10x+5=0 \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب طول نقاط برخورد } P=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$$

۴۵- مماس‌های رسم‌شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر اندازه شعاع دو دایره ۸ و ۱۵ باشد، فاصله بین مراکز دو دایره کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

مطابق شکل، مماس رسم شده بر هر دایره در نقطهٔ تقاطع، از مرکز دایرهٔ دیگر می‌گذرد.



$$\left.\begin{matrix} R=8 \\ R'=15 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\hat{H}=90^\circ} OH^2+HO'^2=OO'^2$$

$$\Rightarrow R^2+R'^2=d^2 \Rightarrow 64+225=d^2$$

$$\Rightarrow d^2=289 \Rightarrow d=\begin{cases} 17 \ ✓ \\ -17 \ ✗ \end{cases}$$

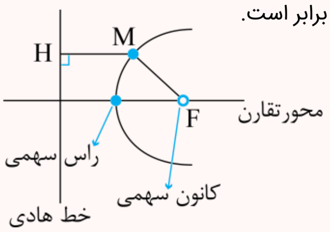
۴۶- اگر $x=3$ معادله خط هادی سهمی به معادله $y^2-2y+4x=a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

سهمی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت به نام کانون سهمی و خطی ثابت به نام خط هادی سهمی برابر است.



$$MF = MH$$

اگر محور تقارن سهمی در جهت محور xها باشد، سهمی افقی و اگر محور تقارن سهمی در جهت محور yها باشد، سهمی قائم است.

معادلهٔ سهمی افقی به مرکز $O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$: a = فاصلهٔ رأس تا خط هادی = فاصلهٔ کانون تا رأس $(y-\beta)^۲ = \pm ۴a(x-\alpha)$

(+): دهانه در جهت محور x (-): دهانه در خلاف جهت محور x

معادلهٔ سهمی قائم به مرکز $O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$: a = فاصلهٔ رأس تا خط هادی = فاصلهٔ کانون تا رأس $(x-\alpha)^۲ = \pm ۴a(y-\beta)$

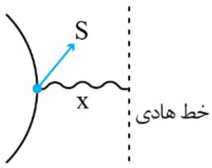
(+): دهانه در جهت محور y (-): دهانه در خلاف جهت محور y

معادلهٔ سهمی $y^۲ - ۲y + ۴x = a \Rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = -۴x + a + ۱$

$$\Rightarrow (y-۱)^۲ = ۴(-۱)(x - \frac{a+۱}{۴})$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{a+۱}{۴} \quad و \quad P = ۱$$

شکل فرضی سهمی :



خط هادی : $x = \frac{a+۱}{۴} + ۱ = \frac{a+۵}{۴}$

$$\Rightarrow \frac{a+۵}{۴} = ۳ \Rightarrow a + ۵ = ۱۲ \Rightarrow a = ۷$$

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: هندسه فصل ۳ دوازدهم

۴۷- به ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a} = (-۱,۲,۳)$، $\vec{b} = (۲,۰,۱)$ و $\vec{c} = (-۴,m,۵)$ در یک صفحه‌اند؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۹۸)

می‌دانیم شرط هم‌صفحه بودن سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ این است که $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰$ باشد:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}-۱ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۰ & ۱\\ -۴ & m & ۵\end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -۱(-m) - ۲(۱۰ - (-۴)) + ۳(۲m) = ۰ \Rightarrow m - ۲(۱۴) + ۶m = ۰ \Rightarrow ۷m = ۲۸ \Rightarrow m = ۴$$

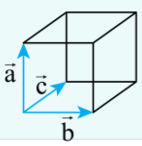
گروه آموزشی ماز

۴۸- اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = ۴\vec{i} + \vec{k}$ باشند، حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۷۴ ۴) ۱۸۹

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور خارج ۹۸)

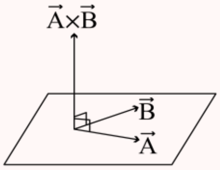
اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرواقع بر یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی این سه بردار برابر است با:



$$v = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

ضرب خارجی ۲ بردار

ضرب خارجی ۲ بردار $\vec{A}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{B}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ برداری است که بر هر ۲ بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و بر صفحهٔ شامل ۲ بردار عمود است. ضرب خارجی ۲ بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ یعنی $\vec{A}\times\vec{B}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۳\vec{i}-۶\vec{j}-۱۲\vec{k}=(۳,-۶,-۱۲)$$

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$\left|(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^۲=\left(\sqrt{۳^۲+(-۶)^۲+(-۱۲)^۲}\right)^۲=۹+۳۶+۱۴۴=۱۸۹$$

گروه آموزشی ماز

۴۹- بردار $\vec{a}=(-۱,\alpha,۱)$ با محور z در فضا زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. اگر $\vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ و زاویهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور zها، θ باشد، مقدار $\cos\theta$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکته ۱:

اگر بردار a به صورت $\vec{a}=(x,y,z)$ باشد:

زاویه بردار $\vec{a}$ با محور xها: $\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}$

زاویه بردار $\vec{a}$ با محور yها: $\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}$

زاویه بردار $\vec{a}$ با محور zها: $\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}$

نکته ۲:

اگر $\vec{a}=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\vec{b}=(x_۲,y_۲,z_۲)$ باشد:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_۱ & y_۱ & z_۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_۱ & z_۱ \\ y_۲ & z_۲ \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_۱ & z_۱ \\ x_۲ & z_۲ \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۲ & y_۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

می‌دانیم که زاویه بردار $\vec{a}(-۱,\alpha,۱)$ با محور z در فضا برابر ۴۵ درجه است. بنابراین طبق نکته ۱:

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}\Rightarrow\cos ۴۵^\circ=\frac{۱}{\sqrt{(-۱)^۲+\alpha^۲+۱}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{\alpha^۲+۲}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۲(\alpha^۲+۲)}=۲\Rightarrow ۲(\alpha^۲+۲)=۴\Rightarrow\alpha^۲+۲=۲\Rightarrow\alpha=۰$$

بنابراین بردار $\vec{\alpha}$ برابر $\vec{a}=(-۱,۰,۱)$ است و می‌دانیم که بردار $\vec{b}$ نیز به صورت $\vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ است. پس:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ -\frac{۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۲ \end{vmatrix}=(۰-\frac{۲}{۳})\vec{i}-(-۲+\frac{۴}{۳})\vec{j}+(-\frac{۲}{۳}-۰)\vec{k}=-\frac{۲}{۳}\vec{i}+\frac{۲}{۳}\vec{j}-\frac{۲}{۳}\vec{k}$$

حال اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2}=\sqrt{3\times\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

در نهایت چون کسینوس زاویه‌ای که بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با محور zها را می‌خواهیم، مجدداً مطابق نکته ۱ داریم:

$$\cos\theta=\frac{z}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

گروه‌آموزشی ماز

۵۰- دو بردار که اندازه یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند. زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

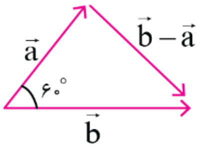
نکته ۱

زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$:

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}.\vec{a}}{|\vec{b}||\vec{a}|}$$

نکته ۲

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2|\vec{b}||\vec{a}|\cos 60=(2|\vec{a}|)^2+|\vec{a}|^2-2(2|\vec{a}|)|\vec{a}|\times\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow|\vec{b}-\vec{a}|^2=3|\vec{a}|^2\rightarrow|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{a}|$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}.(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{b}||\vec{b}-\vec{a}|}=\frac{|\vec{b}|^2-\vec{b}.\vec{a}}{2|\vec{a}|(\sqrt{3}|\vec{a}|)}=\frac{4|\vec{a}|^2-|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ}{2\sqrt{3}|\vec{a}|^2}=\frac{4|\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2}{2\sqrt{3}|\vec{a}|^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\theta=30^\circ$$

گروه‌آموزشی ماز

۵۱- فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ناصفری هستند که ضرب داخلی آن‌ها، $-\frac{3}{5}$ حاصل‌ضرب اندازه‌های دو بردار است. مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۴/۸ ۳) ۳/۲ ۴) ۱/۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته ۱:

ضرب داخلی: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند، آن‌گاه داریم:

θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

نکته ۲:

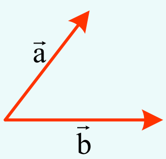
اندازهٔ ضرب خارجی: برای ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضای $\mathbb{R}^3$ داریم:

θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

نکته ۳:

مساحت مثلثی که توسط ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضا ساخته می‌شود برابر است با:



$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

با استفاده از اطلاعات سوال، $\vec{a}.\vec{b} = \frac{-۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}|$ است و می‌دانیم مساحت مثلثی که روی بردارهای داده شده ساخته می‌شود برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}\left|\left(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\right| = \frac{۱}{۲}\left|\vec{o} - \frac{۶\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \frac{\overbrace{۲\vec{b} \times \vec{a}}^{-۲\vec{a}\times\vec{b}}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \vec{o}\right| = \frac{۱}{۲}\left|\frac{-۸(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|$$

$$\xrightarrow[\substack{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{-۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}| \\ \cos\theta = \frac{-۳}{۵} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۴}{۵}}]{\vec{a}.\vec{b} = \frac{-۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}|} \frac{۴|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|} = ۴\left(\frac{۴}{۵}\right) = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲$$

گروه آموزشی ماز